

**Exercice 1**

La formulation intégrale du problème s'exprime par l'égalité

$$\int_{\Omega} (-T \nabla^T \nabla u - \omega^2 \rho h u) \delta u \, dx dy = 0 \quad \forall \delta u$$

où  $\delta u$  dénote le déplacement transversal virtuel. En intégrant par parties, on a

$$\int_{\Omega} T (\nabla u)^T \nabla \delta u \, dx dy - \int_{\partial \Omega} T \mathbf{N}^T \nabla u \delta u \, ds = \omega^2 \int_{\Omega} \rho h u \delta u \, dx dy \quad \forall \delta u$$

où  $\mathbf{N}$  est la matrice des cosinus directeurs de la normale extérieure  $\mathbf{n}$  à la frontière  $\partial \Omega$ .

Les conditions aux limites étant essentielles, leurs contreparties virtuelles s'annulent sur la frontière, de sorte que la forme intégrale se réduit à

$$\int_{\Omega} T (\nabla u)^T \nabla \delta u \, dx dy = \omega^2 \int_{\Omega} \rho h u \delta u \, dx dy \quad \forall \delta u$$

La forme faible du problème s'écrit ainsi

$$u \in \mathcal{U} : \int_{\Omega} T (\nabla u)^T \nabla \delta u \, dx dy - \omega^2 \int_{\Omega} \rho h u \delta u \, dx dy = 0 \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}$$

avec les classes de fonctions

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{w(x, y) \mid w(x, y) \in H^1(\Omega); w(s) = 0 \, \forall s \in \partial \Omega\}$$

$$H^1(\Omega) = \{w(x, y) \mid w \in L^2(\Omega); \partial w / \partial x \in L^2(\Omega); \partial w / \partial y \in L^2(\Omega)\}$$

où  $w$  dénote indifféremment le déplacement transversal réel  $u$  ou virtuel  $\delta u$ .

La forme faible approchée a pour expression

$$u^h \in \mathcal{U}^h \subset \mathcal{U} : \int_{\Omega} T (\nabla u^h)^T \nabla \delta u^h \, dx dy - \omega^2 \int_{\Omega} \rho h u^h \delta u^h \, dx dy = 0 \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

où  $u^h$  et  $\delta u^h$  sont les déplacements approchés réel et virtuel et où  $\mathcal{U}^h$  et  $\mathcal{V}^h$  sont les sous-espaces respectifs de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ .

Dans la méthode de Galerkin, les approximations  $u^h$  et  $\delta u^h$  sont choisies sous les formes d'ordre  $n$  suivantes

$$u^h(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x, y)$$

$$\delta u^h(x, y) = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i h_i(x, y)$$

dans lesquelles les grandeurs  $h_i(x, y)$  sont les fonctions de forme et les variables  $\alpha_i$  et  $\delta \alpha_i$  sont les inconnues discrètes réelles et virtuelles. En portant ces approximations dans la forme faible approchée, on obtient le problème aux valeurs propres d'ordre  $n$  ci-après

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

où les composantes  $k_{ij}$  et  $m_{ij}$  des matrices respectives de rigidité  $\mathbf{K}$  et de masse  $\mathbf{M}$  s'écrivent

$$k_{ij} = \int_{\Omega} T [(\partial h_i / \partial x)(\partial h_j / \partial x) + (\partial h_i / \partial y)(\partial h_j / \partial y)] \, dx dy$$

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \rho h h_i h_j \, dx dy$$

En choisissant une approximation biharmonique à un paramètre, respectant les conditions de bord essentielles sur tout le pourtour de la membrane,

$$u^h(x, y) = \alpha_1 h_1(x, y) \quad h_1(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$$

les matrices de rigidité et de masse se ramènent à des scalaires

$$k_{11} = \int_{\Omega} T[(\partial h_1/\partial x)^2 + (\partial h_1/\partial y)^2] dx dy = \frac{\pi^2 T}{4} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

$$m_{11} = \int_{\Omega} \rho h h_1^2 dx dy = \rho h a b$$

La première pulsation propre approchée vaut donc

$$\omega_1 = \sqrt{k_{11}/m_{11}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{T}{\rho h}} = 1,571 \sqrt{\left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{T}{\rho h}}$$

ce qui correspond en fait à la valeur exacte car l'approximation choisie est le premier mode propre de la membrane.

Dans l'approche globale des éléments finis, les approximations  $u^h$  et  $\delta u^h$  ont les allures

$$u^h(x, y) = \sum_{i=1}^n q_i h_i(x, y)$$

$$\delta u^h(x, y) = \sum_{i=1}^n \delta q_i h_i(x, y)$$

dans lesquelles les grandeurs  $h_i(x)$  sont toujours les fonctions de forme, mais cette fois à support compact, et les variables  $q_i$  et  $\delta q_i$  sont les déplacements transversaux nodaux réels et virtuels. En portant ces approximations dans la formulation faible approchée, on obtient le problème aux valeurs propres d'ordre  $n$  suivant

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

où les composantes  $k_{ij}$  et  $m_{ij}$  des matrices respectives de rigidité  $\mathbf{K}$  et de masse  $\mathbf{M}$  restent écrites sous les formes

$$k_{ij} = \int_{\Omega} T[(\partial h_i/\partial x)(\partial h_j/\partial x) + (\partial h_i/\partial y)(\partial h_j/\partial y)] dx dy$$

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \rho h h_i h_j dx dy$$

En choisissant un réseau à un seul élément fini quadratique lagrangien à 9 nœuds, le déplacement est approché uniquement par la fonction de forme nodale relative au nœud central 9, puisque toutes les autres fonctions doivent être nulles pour respecter les conditions essentielles de bord,

$$u^h(x, y) = q_9 h_9(x, y)$$

En appliquant le changement de variables

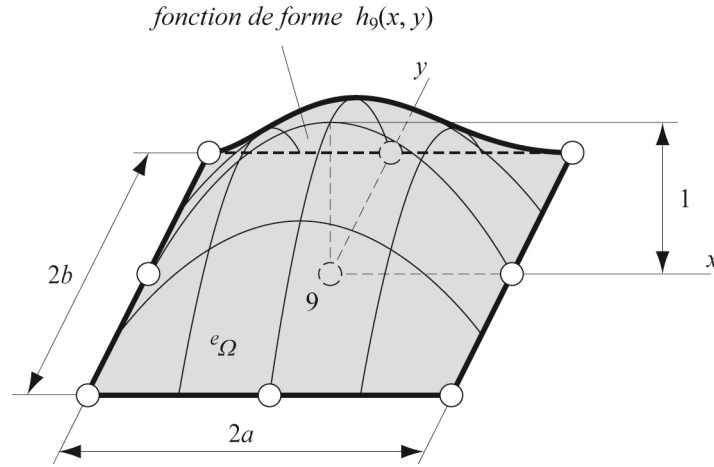
$$\xi = x/a \quad \eta = y/b$$

à la fonction de base relative au nœud 9 d'un élément lagrangien biquadratique  ${}^e\Omega$

$${}^e h_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

on trouve pour la fonction de forme cherchée

$$h_9(x, y) = [1 - (x/a)^2][1 - (y/b)^2]$$



En plaçant cette fonction dans l'expression des composantes des matrices de rigidité et de masse, on obtient

$$k_{99} = \int_{\Omega} T[(\partial h_9/\partial x)^2 + (\partial h_9/\partial y)^2] dx dy = \frac{128 T}{45} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

$$m_{99} = \int_{\Omega} \rho h h_9^2 dx dy = \frac{256}{225} \rho h a b$$

La première pulsation propre approchée a ainsi pour valeur

$$\omega_1 = \sqrt{k_{99}/m_{99}} = \sqrt{\frac{5}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{T}{\rho h}}} = 1,581 \sqrt{\left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{T}{\rho h}}$$

soit une erreur de 0,7%.

On notera que l'approche globale, adoptée ici, de la méthode des éléments finis n'est applicable concrètement qu'en présence d'un seul élément fini. Dans cette stratégie, les fonctions de forme nodales doivent en effet être construites, ce qui n'est envisageable que si l'élément fini couvre le domaine entier.

## Exercice 2

Prenant une valeur unitaire au nœud correspondant et une valeur nulle aux autres points nodaux, les fonctions de base  $^e h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) d'un élément fini lagrangien quadratique-cubique à 12 nœuds sont construites par produits normés de deux polynômes linéaires en  $\xi$  et de trois polynômes linéaires en  $\eta$ , conduisant à des polynômes de Lagrange quadratiques-cubiques. On trouve ainsi pour les nœuds mentionnés

$$\begin{aligned} ^e h_1(\xi, \eta) &= \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} \cdot \frac{(\eta - \eta_2)(\eta - \eta_3)(\eta - \eta_4)}{(\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 - \eta_3)(\eta_1 - \eta_4)} \\ &= \frac{(\xi - 1)(\xi - 0)}{(-1 - 1)(-1 - 0)} \cdot \frac{(\eta - 1)(\eta + 1/3)(\eta - 1/3)}{(-1 - 1)(-1 + 1/3)(-1 - 1/3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{32} \xi(\xi-1)(1-\eta)(1-9\eta^2) \\
{}^e h_6(\xi, \eta) &= \frac{(\xi-\xi_1)}{(\xi_2-\xi_1)} \frac{(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_3)} \cdot \frac{(\eta-\eta_1)}{(\eta_3-\eta_1)} \frac{(\eta-\eta_2)}{(\eta_3-\eta_2)} \frac{(\eta-\eta_4)}{(\eta_3-\eta_4)} \\
&= \frac{(\xi+1)}{(1+1)} \frac{(\xi-0)}{(1-0)} \cdot \frac{(\eta+1)}{(-1/3+1)} \frac{(\eta-1)}{(-1/3-1)} \frac{(\eta-1/3)}{(-1/3-1/3)} \\
&= \frac{9}{32} \xi(\xi+1)(1-\eta^2)(1-3\eta) \\
{}^e h_7(\xi, \eta) &= \frac{(\xi-\xi_1)}{(\xi_3-\xi_1)} \frac{(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_2)} \cdot \frac{(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)} \frac{(\eta-\eta_3)}{(\eta_2-\eta_3)} \frac{(\eta-\eta_4)}{(\eta_2-\eta_4)} \\
&= \frac{(\xi+1)}{(0+1)} \frac{(\xi-1)}{(0-1)} \cdot \frac{(\eta+1)}{(1+1)} \frac{(\eta+1/3)}{(1+1/3)} \frac{(\eta-1/3)}{(1-1/3)} = -\frac{1}{16} (1-\xi^2)(1+\eta)(1-9\eta^2) \\
{}^e h_{11}(\xi, \eta) &= \frac{(\xi-\xi_1)}{(\xi_3-\xi_1)} \frac{(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_2)} \cdot \frac{(\eta-\eta_1)}{(\eta_4-\eta_1)} \frac{(\eta-\eta_2)}{(\eta_4-\eta_2)} \frac{(\eta-\eta_3)}{(\eta_4-\eta_3)} \\
&= \frac{(\xi+1)}{(0+1)} \frac{(\xi-1)}{(0-1)} \cdot \frac{(\eta+1)}{(1/3+1)} \frac{(\eta-1)}{(1/3-1)} \frac{(\eta+1/3)}{(1/3+1/3)} = \frac{9}{16} (1-\xi^2)(1-\eta^2)(1+3\eta)
\end{aligned}$$

où  $\xi = [-1, +1]$  et  $\eta = [-1, +1]$  sont les coordonnées naturelles de l'élément et  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = +1$  et  $\xi_3 = 0$  et  $\eta_1 = -1$ ,  $\eta_2 = +1$ ,  $\eta_3 = -1/3$  et  $\eta_4 = +1/3$  sont respectivement les abscisses ou ordonnées des rangées de points nodaux (dans l'ordre, rangées d'extrémité, rangées internes).

On relèvera que ces fonctions auraient pu être obtenues directement en multipliant la bonne fonction quadratique en  $\xi$  avec la bonne fonction cubique en  $\eta$ .

